



## الدوال المثلثية للزوايا المتنسبية

الزاويتان المتنسبتان:

• هما زاويتان الفرق بين قياسهما أو مجموع قياسهما عدد صحيح من القوائم

☞ إذا كان:  $\theta + \beta = 90^\circ$

☞ إذا كان:  $\theta - \beta = 90^\circ$

☞ زاويتان متنسبتان لأن مجموعهما  $270^\circ$  " ٣ قوائم"

☞ زاويتان متنسبتان لأن الفرق بينهما  $180^\circ$  " ٢ قائمتان"

يعنى لها

مثال ١ أوجد الزاوية التي تتنسب لها كل من الزوايا التالية:  $150^\circ, 210^\circ, 315^\circ, 210^\circ, 150^\circ$

$\theta$  \_\_\_\_\_  $\theta$

☞ زاويتان  $150^\circ, 30^\circ$  زاويتان متنسبتان

☞ زاويتان  $210^\circ, 30^\circ$  زاويتان متنسبتان

☞ زاويتان  $315^\circ, 45^\circ$  زاويتان متنسبتان

بعض خواص الدوال المثلثية للزوايا المتنسبة:

• الزوايا التي قياساتها  $(\theta - 180^\circ), (\theta + 180^\circ), (\theta + 360^\circ), (\theta - 360^\circ)$

☞ تحافظ على الدوال المثلثية كما هي دون تغير في الدالة المثلثية وتكتسبها اشارة الربع التي تقع فيه

☞ حا.  $(\theta + 180^\circ) = -$  حا.

☞ الزاوية  $(\theta + 180^\circ)$  تقع في الربع الثالث

☞ فيكون الناتج النهائي سالب لأن (حا) في الربع الثالث سالبة

يعنى لها

بعض خواص الدوال المثلثية للزوايا المتنسبة:

• الزوايا التي قياساتها  $(\theta - 90^\circ), (\theta + 90^\circ), (\theta - 270^\circ), (\theta + 270^\circ)$

☞ لاتحافظ على الدوال المثلثية وتغير في الدالة المثلثية بوضع حرف ت أو حذفه م إشارة ربعها

☞ حا.  $(\theta + 270^\circ) = -$  حتا " وضعنا حرف ت "

☞ الزاوية  $(\theta + 270^\circ)$  تقع في الربع الرابع

☞ فيكون الناتج النهائي سالب لأن (حا) في الربع الرابع سالبة

يعنى لها

الدوال المثلثية للزاوية الحادة التي قياسها  $(-\theta)$ :

☞ حا.  $(-\theta) = -$  حا. ☞ تطـرـدـ السـالـبـ

☞ حـتاـ.  $(-\theta) =$  حـتاـ ☞ تـرـوـبـ السـالـبـ

☞ طـتاـ.  $(-\theta) =$  طـطاـ ☞ تـطـرـدـ السـالـبـ





**مُثُلٌ ٦** أوجد بطريقتين قيمة:  $\text{حا} 150^\circ$

**خط بالك**

١٥٠° تقع في الربع الثاني  
فتكون اشارة حا موجبة

**الطريقة الأولى:**  $\text{حا} 150^\circ = \text{حا}(180^\circ - 30^\circ) = \text{حا} \frac{1}{2}(30^\circ)$

**الطريقة الثانية:**  $\text{حا} 150^\circ = \text{حا}(90^\circ + 60^\circ) = \text{حتا} 60^\circ$

**مُثُلٌ ٧** أوجد بطريقتين قيمة:  $\text{حا} 240^\circ$

**خط بالك**

٢٤٠° تقع في الربع الثالث  
فتكون اشارة حتا سالبة

**الطريقة الأولى:**  $\text{حتا} 240^\circ = \text{حتا}(180^\circ + 60^\circ) = -\text{حتا} 60^\circ = -\frac{1}{3}(30^\circ)$

**الطريقة الثانية:**  $\text{حتا} 240^\circ = \text{حتا}(30^\circ - 270^\circ) = -\text{حتا} 240^\circ$

**مُثُلٌ ٨** أوجد بطريقتين قيمة: طا  $315^\circ$

**خط بالك**

٣١٥° تقع في الربع الرابع  
فتكون اشارة طا سالبة

**الطريقة الأولى:**  $\text{طا} 315^\circ = \text{طا}(45^\circ + 360^\circ) = -\text{طا} 45^\circ$

**الطريقة الثانية:**  $\text{طا} 315^\circ = \text{طا}(45^\circ + 270^\circ) = -\text{طتا} 45^\circ$

**مُثُلٌ ٩** أجد قيمة: طا  $(-45^\circ)$  حا  $(-30^\circ)$

**خط بالك**

٣١٥° تقع في الربع الرابع  
فتكون اشارة طا سالبة

$\text{طا}(-45^\circ) \text{حا}(-30^\circ) = -\text{طا} 45^\circ \times \text{حا} 30^\circ$

$\text{طا}(-45^\circ) \text{حا}(-30^\circ) = \frac{1}{2}(-1) \times (-1) = \frac{1}{2}$

**مُثُلٌ ١٠** أجد بدون استخدام الالة الحاسبة أحسب قيمة:  
 $\text{حتا}(-300^\circ) \text{حا} 150^\circ + \text{حتا} 930^\circ \text{طتا} 240^\circ$

**خط بالك**

$\text{حتا}(-300^\circ) = \text{حتا} 300^\circ - 60^\circ = \text{حتا} 60^\circ = \frac{1}{3}(360^\circ)$

$\text{حا} 150^\circ = \text{حا} 180^\circ - 30^\circ = \text{حا} 30^\circ = \frac{1}{2}(30^\circ)$

$\text{حتا} 930^\circ = \text{حتا} 210^\circ = \text{حتا} 180^\circ + 30^\circ = \text{حتا} 180^\circ + \text{طتا} 30^\circ = \text{طتا} 60^\circ = \frac{1}{3}(360^\circ)$

$\therefore \text{المقدار} = \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

**مُثُلٌ ١١** إذا كان الضلع النهائي للزاوية  $\theta$  المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3})$  أجد قيمة:

(١) طا  $(\theta - 270^\circ)$   
(٢) حا  $(\theta + 180^\circ)$   
(٣) حتا  $(-\theta)$

**سلسلة المتفوق**

**محمد أبو خميس**

**أستاذ الرياضيات**

٩٩







## تعارين الزوايا المتنسبة

أولاً: أختير الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعلقة:

(١) إذا كان:  $\theta = 80^\circ$ , حيث  $180^\circ > \theta > 270^\circ$  فإن: طتا =  $\theta - 270^\circ$

٤-٢ (٢) ٣-١ (٣)

(٢) إذا كان:  $\theta + \beta = 90^\circ$ , فإن: طاب =  $\frac{1}{3}(\theta + \beta)$

٣-٥ (٤) ١-٢ (٥) ٢-٣ (٦)

(٣) إذا كان: بـ د شكل رباعي دائري وكان  $\hat{A} = \frac{3}{5}\pi$  فإن:  $\hat{H} = \hat{A}$

٤-٥ (٤) ٤-٣ (٥) ٣-٥ (٦)

(٤) إذا كان: بـ د شكل رباعي فيه  $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$  فإن:  $\hat{H} = \frac{3}{5}\pi$

٤-٥ (٤) ٤-٣ (٥) ٣-٥ (٦)

(٥) إذا كان:  $\theta = 270^\circ - \hat{A}$

٥-٥ (٦) ٦-٦ (٧)

(٦) إذا كان: سـ صـ عـ مـ ثـ حـ اـ دـ زـ اـ يـاـ فـ يـهـ طـ ا~ع~ =  $\frac{1}{3}\pi$  فإن:  $\hat{H} = \hat{S} + \hat{C} + \hat{U}$

٥-٣ (٦) ٣-٣ (٧)

(٧) إذا كان:  $\hat{H} = 90^\circ \times \hat{Q}$

٥-٥ (٨) ١-١ (٩)

(٨) أبسط صورة للمقدار:  $\hat{H} = \hat{A} + \hat{B}$

٥-٥ (٩) ٦-٦ (١٠)

(٩) إذا كان:  $\hat{A} = 5^\circ - \theta$ , حيث  $\exists \theta \in [0^\circ, 90^\circ]$  فإن قيمة:  $\hat{H} = \pi \times \hat{Q}$

٥-٥ (١٠) ٥-٥ (١١)

(١٠) إذا كان:  $\hat{A} = \frac{3}{4}\pi$  حيث  $\pi < \hat{B} < \frac{3}{2}\pi$  فإن قيمة:  $\hat{H} = 360^\circ - \hat{B}$

٥-٥ (١١) ٤-٣ (١٢)

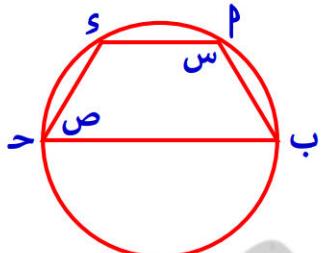
(١١) إذا كان:  $\hat{A} = \frac{3}{4}\pi$  حيث  $0^\circ < \theta < \pi$  فإن قيمة:  $\hat{H} = \hat{A} + \hat{B}$

٥-٣ (١٢) ٤-٣ (١٣)

(١٢) إذا كان:  $\hat{A} = \frac{3}{5}\pi$  فإن:  $\hat{H} = \hat{A} + \hat{B}$

٤-٥ (١٣)





في الشكل المقابل:

$$\text{إذا كان: حتا } s = -\frac{3}{5}$$

$$\text{فإن: حتا } c = \dots \dots \dots$$

$$\text{B} \quad \text{P} \quad 0.6$$

$$\text{C} \quad \text{H} \quad 0.8$$

(١٤) إذا كانت  $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية الموجة  $\theta$  في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة فإن: حا  $(\theta - 180^\circ) = \dots \dots \dots$ 

$$\text{D} \quad \text{H} \quad \frac{4}{5}$$

$$\text{E} \quad \text{H} \quad \frac{3}{5}$$

$$\text{F} \quad \text{H} \quad \frac{3}{5}$$

(١٥) إذا كانت  $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية الموجة  $\theta$  في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة فإن: حتا  $(\theta + 90^\circ) = \dots \dots \dots$ 

$$\text{G} \quad \text{H} \quad \frac{4}{5}$$

$$\text{I} \quad \text{H} \quad \frac{3}{5}$$

$$\text{J} \quad \text{H} \quad \frac{3}{5}$$

(١٦) أبسط صورة للمقدار: حا  $(\theta + 90^\circ) + \text{حا } (\theta + 180^\circ) = \dots \dots \dots$  هي

$$\text{K} \quad \text{H} \quad \text{صفر}$$

$$\text{L} \quad \text{H} \quad \text{صفر}$$

$$\text{M} \quad \text{H} \quad \text{صفر}$$

(١٧) إذا كانت  $\theta$  زاوية موجة في وضعها القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة  $(s, \frac{3}{5})$  حيث  $s > 0$ . فإن حتا  $(\theta + 90^\circ) = \dots \dots \dots$ 

$$\text{N} \quad \text{H} \quad \frac{4}{5}$$

$$\text{O} \quad \text{H} \quad \frac{3}{5}$$

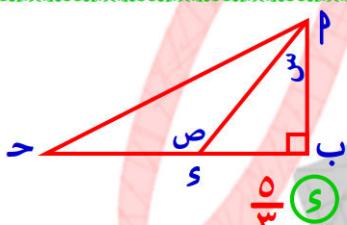
$$\text{P} \quad \text{H} \quad \frac{3}{5}$$

(١٨) إذا كان  $s$   $c$  ع مثلث، حا  $= \frac{1}{2} s$  فإن: حا  $(s + c) = \dots \dots \dots$ 

$$\text{Q} \quad \text{H} \quad \frac{1}{4}$$

$$\text{R} \quad \text{H} \quad \frac{1}{2}$$

$$\text{S} \quad \text{H} \quad \frac{1}{4}$$



في الشكل المقابل:

$$\text{إذا كان طا } c = -\frac{4}{3}$$

$$\text{فإن حاس} = \dots \dots \dots$$

$$\text{P} \quad \text{H} \quad \frac{3}{4}$$

(٢٠) إذا كان  $\theta \in [0, \pi]$  وكان حا  $(\theta - \frac{\pi}{2}) + \text{حـتا } \theta = \frac{24}{13}\pi$  فإن: طتا  $\theta = \dots \dots \dots$ 

$$\text{Q} \quad \text{H} \quad \frac{12}{5}$$

$$\text{R} \quad \text{H} \quad \frac{9}{5}$$

$$\text{S} \quad \text{H} \quad \frac{8}{5}$$

$$\text{T} \quad \text{H} \quad \text{س}$$

$$\text{U} \quad \text{H} \quad \text{س}$$

$$\text{V} \quad \text{H} \quad \text{س}$$

$$\text{W} \quad \text{H} \quad \text{س}$$

(٢٢) إذا كان: طتا  $(\theta + 180^\circ) = \frac{3}{4}\pi$  فإن: طا  $(\theta + 90^\circ) = \dots \dots \dots$ 

$$\text{X} \quad \text{H} \quad 6$$

$$\text{Y} \quad \text{H} \quad 9$$

$$\text{Z} \quad \text{H} \quad 12$$

$$\text{A} \quad \text{H} \quad 16$$

(٢٣) إذا كان  $\theta$  بـ  $\frac{1}{2}$  مثلث قائم الزاوية في بـ فإن: حا  $(\theta + 90^\circ) = \dots \dots \dots$ 

$$\text{B} \quad \text{H} \quad \text{جـتا}$$

$$\text{C} \quad \text{H} \quad \text{جـتا}$$

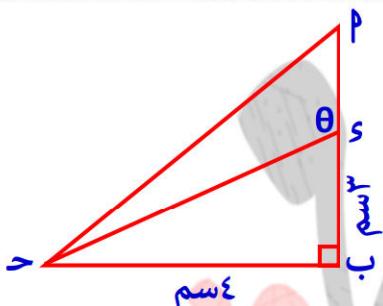
$$\text{D} \quad \text{H} \quad \text{جـتا}$$

$$\text{E} \quad \text{H} \quad \text{جـتا}$$

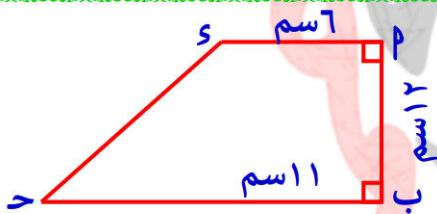




٢-٥



٢-٦



١٢-٣

٤-٣

٥-٣

٣-٢

إذا كان  $\theta + \beta = 90^\circ$  ، فإن طاب = .....  
 $\theta + \beta = 90^\circ$  ،  $\theta = 30^\circ$  ،  $\beta = 60^\circ$   
 $\theta + \beta = 90^\circ$  ،  $\theta = 120^\circ$  ،  $\beta = 60^\circ$

٥-٣

٤-٣

١-٤

في الشكل المقابل:

 $\sin(\theta) = \frac{3}{4}$  ،  $\theta = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{3}{4}\right)$  $\theta = 180^\circ - 36.87^\circ = 143.13^\circ$ 

٣-٥

٣-٤

٤-٥

٤-٤

في الشكل المقابل:

 $\theta // \beta$  ،  $\theta = 90^\circ$  $\theta = 60^\circ$  ،  $\beta = 110^\circ$  ،  $\theta = 110^\circ$  $\theta = 120^\circ$  ،  $\beta = 60^\circ$ 

٥-١٣

١٢-١٣

٤-١٣

٢-١٣

٥-٣

٣-٢

٥-٣

٣-٢

إذا كان  $\theta + \beta = 90^\circ$  ، حيث س قياس أكبر زاوية موجبة ، س  $\in [0, 2\pi]$  فإن القيمة العددية  
 للنقدار  $(540^\circ + \theta)$  تساوي .....  
 $\theta = 30^\circ$  ،  $\beta = 60^\circ$

٥-٣

٤-٣

٥-٤

٣-٥

٥-٣

١-٣

٤-٣

١-٣

٥-٤

٢-٣

٥-٣

١-٣

٤-٣

١-٣

٥-٣

١-٣

٥-٣

١-٣

٥-٤

٤-٣

٥-٤

١٢٠

٢٤٠

٢٤٠

٢٤٠

ثانياً: الأسئلة المقالية:

(١) أوجد قيمة كلًّا من:

(١) حتا ١٢٠

(٢) قتا ٢٤٠

(٣) طا ٣٠٠

(٤) حتا ٤٢٠

(١) أوجد قيمة كلًّا من:

(١) حتا ٢٢٥

(٢) حتا ٣٣٠

(٣) حتا ٢١٠

(٤) حتا ٣٣٠



(٥) حا.٧٨٠١٢٠٠ + حا.(١٥٠٠) جتا.٢٤٠٠ + حتا.١٨٠٠

(٦) حتا.٤٥٠٢٠٠ + حا.٥٤٠٣٠٠ - حتا.(٩٠٠)

(٧) حا.٥١٠٥١٠ + جتا.(٦٠٠٣١٥٠٠) طا.٢٥٠٢٥٠ + قاتا.٦٥٠٦٥٠

(٨) إذا كان:  $\theta = 135^\circ$  حيث  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  أوجد

(٤) طا.١٨٠٠ + (θ)

(٣) حا.(θ) - جتا.٣٦٠٠

(٢) (θ) - ٣٦٠٠ جتا.

(١) حا.١٨٠٠ + (θ)

(٩) إذا كان:  $\theta = 45^\circ$  حيث  $30^\circ < \theta < 60^\circ$  أوجد

(١٠) جتا.٣٦٠٠ + (θ) - حا.٣٦٠٠

(١) قاتا.١٨٠٠ + (θ)

(١١) إذا كان  $\theta$  هو قياس زاوية حادة موجبة في وضعها القياسي وتعيين على دائرة الوحدة بالنقطة

$B\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$  فأوجد:

(١٢) طتا.١٨٠٠ + (θ) - طا.٩٠٠ - حا.٩٠٠

(١) طا.٩٠٠ - (θ) + قاتا.٩٠٠

(٢) حا.٩٠٠ - (θ) + جتا.٩٠٠

(١٣) إذا كان:  $\theta = -\frac{\pi}{4}$  حيث  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  أوجد

(١٤) حتا.(-θ)

(١٥) قاتا.٣٦٠٠ - (θ)

(١٦) طتا.١٨٠٠ + (θ) - طتا.٢٧٠٠

(١) حا.١٨٠٠ - (θ)

(٤) حتا.١٨٠٠ + (θ)

رسالة الدلبيحة:

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعلوطة:

(١) في الشكل المقابل:

م(د) = س٠٠، ف(د) ب ح = ص٠٠

فإن: طا س = .....

ب طتا ص

ح حاتا ص

١ طا ص

٢ حاتا ص

(٢) في الشكل المقابل:

ب ب قطر في الدائرة م ، فإذا كان طا س =  $\frac{12}{5}$

فإن: حاتا ص = .....

ب  $\frac{13}{5}$

ح  $\frac{5}{13}$

١ طا ص

٢ حاتا ص

