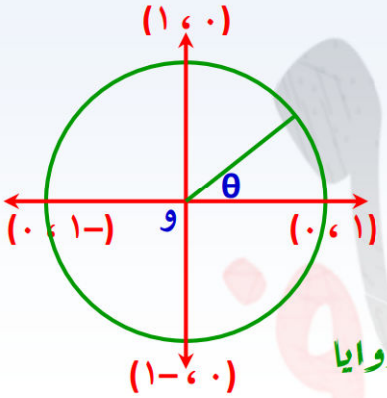
الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة:



- دائرة الوحدة تقطع محور
- السينات عند الزاوية ٠° في النقطة (١ ، ٠)
- السينات عند الزاوية ١٨٠° في النقطة (-١ ، ٠)
- الصادات عند الزاوية ٩٠° في النقطة (٠ ، ١)
- الصادات عند الزاوية ٢٧٠° في النقطة (٠ ، -١)
- من خلال تلك النقط نستطيع حساب الدوال المثلثية لتلك الزوايا

	٠°	١٨٠°	٩٠°	٢٧٠°	٣٠°	٦٠°	٤٥°
النقطة	(١ ، ٠)	(-١ ، ٠)	(٠ ، ١)	(٠ ، -١)	$(\frac{\sqrt{3}}{2}، \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}، \frac{\sqrt{3}}{2})$	$(\frac{1}{\sqrt{2}}، \frac{1}{\sqrt{2}})$
حا	٠	٠	١	-١	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
حتا	١	-١	٠	٠	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
طا	٠	٠	غير معرف	غير معرف	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	١

مثال ١ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة: حا٣٠° حتا٦٠° + حتا٣٠° حا٦٠° + قا٢ ٤٥°

الحل

$$\text{حا}٣٠^\circ \text{حتا}٦٠^\circ + \text{حتا}٣٠^\circ \text{حا}٦٠^\circ + \text{قا}^2 ٤٥^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 2 = 3$$

مثال ٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة: قا٦٠° + حا٢٧٠° طا٢ ٦٠°

خلي بالك
- حتا ٦٠° = $\frac{1}{2}$
- نقلبها فيكون: قا = ٢θ

الحل

$$\text{قا}٦٠^\circ + \text{حا}٢٧٠^\circ \text{طا}^2 ٦٠^\circ = 2 + (-1) + (\sqrt{3})^2$$

$$= 2 - 1 + 3 = 4$$

مثال ٣ أثبت صحة المتساويات التالية: حا٣ ٣٠° = ٩حتا٣ ٦٠° - طتا٢ ٤٥°

الحل

الطرف الأيمن = حا٣ ٣٠° = $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

الطرف الأيسر = ٩حتا٣ ٦٠° - طتا٢ ٤٥° = ٩ × $(\frac{1}{2})^3 - (1)^2 = \frac{1}{8}$

∴ الطرفان متساويان والعلاقة صحيحة

مثال ٤ أثبت صحة المتساويات التالية: $\text{حتا}\frac{\pi}{2} = \text{حتا}^2\frac{\pi}{4} - \text{حا}^2\frac{\pi}{4}$

الحـــــــل

الطرف الأيمن = $\text{حتا}\frac{\pi}{2} = \text{حتا}\,90^\circ = 0$

الطرف الأيسر = $\text{حتا}^2\frac{\pi}{4} - \text{حا}^2\frac{\pi}{4} = \text{حتا}^2 45^\circ - \text{حتا}^2 45^\circ$

$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 0$

∴ الطرفان متساويان والعلاقة صحيحة

خلي بالك
- π تكافئ 180°
- $\frac{\pi}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$
- $\frac{\pi}{4} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$

مثال ٥ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

إذا كان: $\text{حا}\theta = -1$ ، $\text{حتا}\theta$ = صفر فإن: θ = ...

(أ) $\frac{\pi}{2}$ (ب) π (ج) $\frac{3\pi}{2}$ (د) 2π

الحـــــــل

نقطة التقاطع مع دائرة الوحدة هي =($\text{حتا}\theta$ ، $\text{حا}\theta$) = (٠ ، -١)

∴ $\theta = 180^\circ = \pi$ الإختيار (ب)

مثال ٦ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

إذا كانت: $\text{قتا}\theta = 2$ حيث θ قياس زاوية حادة موجبة فإن: θ = ...

(أ) 15° (ب) 30° (ج) 45° (د) 60°

الحـــــــل

$\text{قتا}\theta = 2$ نقلبها $\text{حا}\theta = \frac{1}{2}$ ☜ أعمل شيفت sin

$\theta = 30^\circ$ الإختيار (ب)

بعض خواص الزوايا المثلث:

- مجموع قياسات زوايا المثلث = 180°
- المثلث المتساوي الساقين زاويتا القاعدة دائما حادتين
- ☜ زاوية القاعدة = $\frac{180^\circ - \text{زاوية الرأس}}{2}$
- المثلث المتساوي الأضلاع جميع زواياه متساوية وقياس كل زاوية 60°

بعض خواص الزوايا المربع:

- مجموع قياسات زوايا المربع = 360°
- ☜ كل زاوية في المربع = 90°
- ☜ الزاوية بين قطر المربع وضلع المربع 45°
- ☜ الزاوية بين قطري المربع 90°

مثال ٧ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

أ ب حـ مثلث متساوي الساقين فيه: ق(∠أ) = ١٢٠° فإن: حا ب + حتا² حـ = ...

(أ) ١ (ب) ١,٥ (حـ) ١,٧٥ (د) ١,٢٥

الحل

∵ أ ب حـ مثلث متساوي الساقين فيه: ق(∠أ) = ١٢٠°

∴ ق(∠أ) = ق(∠حـ) = $\frac{١٨٠^\circ - ١٢٠^\circ}{٢}$ = ٣٠°

∴ حا ب + حتا² حـ = حا ٣٠° + حتا² ٣٠° = ١,٢٥ الإختيار (د)

مثال ٨ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

إذا كانت: أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ق(∠أ) = ٢ ق(∠حـ) فإن: قا أ + قتا حـ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (حـ) ٦ (د) ٨

الحل

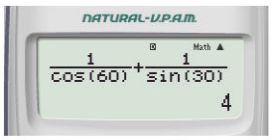
نفرض أن: ق(∠حـ) = س يكون ق(∠أ) = ٢س

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

٩٠° + س + ٢س = ١٨٠° ⟸ ٣س = ١٨٠° − ٩٠°

٣س = ٩٠° بالقسمة على ٣ ⟸ س = ٣٠°

قا أ + قتا حـ = قا ٦٠° + قتا ٣٠° = ٤ الإختيار (ب)



☜ بالآلة الحاسبة

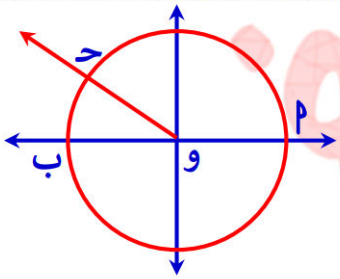
علاقة رأيت قدها
ليصوقت الحزن لوجت السيل
01117035826

تمارين الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

أولاً: أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

١) إذا كانت حا س = −١ ، حتا س = ٠ فإن س = ...
(أ) ٩٠° (ب) ١٨٠° (حـ) ٢٧٠° (ء) ٣٦٠°

٢) إذا كان θ قياس زاوية حادة وكان: طا$^{-١}$ ١ = θ حيث θ زاوية حادة فإن: θ =.....
(أ) ٤٥° (ب) ٣٠° (حـ) ٦٠° (ء) ٧٥°

٣) في الشكل المقابل:


دائرة الوحدة ، ق(∠ أ و حـ) = $\frac{٣\pi}{٤}$
فإن: إحداثيات النقطة حـ هي =.....
(أ) (١ ، ١) (ب) $(\frac{١}{٢}، \frac{١}{٢})$
(حـ) $(-\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{\sqrt{٢}}{٢})$ (ء) $(\frac{\sqrt{٢}}{٢}، -\frac{\sqrt{٢}}{٢})$

٤) أي المستقيمات التالية يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$؟
(أ) ص = ٣س (ب) ص = $\sqrt{٣}$ س (حـ) $\sqrt{٣}$ ص = س (ء) ص = −$\sqrt{٣}$ س

٥) إذا كان حا θ = $\frac{١}{٢}$ ، حتا θ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ فإن: θ =.....
(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi٥}{٦}$ (حـ) $\frac{\pi٥}{٣}$ (ء) $\frac{\pi١١}{٣}$

٦) إذا كان قتا θ = ٢ وكان θ قياس زاوية حادة فإن: θ =.....
(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (حـ) ٤٥° (ء) ٦٠°

٧) قيمة المقدار قتا^{٢} ٤٥° + قا^{٢} ٤٥° =.....
(أ) ١ (ب) ٢ (حـ) ٤ (ء) ٢$\sqrt{٢}$

٨) إذا كان: طا θ حتا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، θ زاوية حادة فإن θ =.....
(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (حـ) ٦٠° (ء) ٩٠°

٩) إذا كان طتا ٣θ = $\sqrt{٣}$ وكان ٣θ قياس زاوية حادة فإن: θ =.....
(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (حـ) ٢٠° (ء) ١٠°

ثانياً: الأسئلة المقالية:

١) أوجد قيمة كلاً من:
(١) حا ٣٠° (٢) قا ٤٥° (٣) قتا ٣٠° (٤) قا ٦٠°
(٥) حتا ٩٠° (٦) طا ٦٠° (٧) طتا ١٨٠° (٨) حتا ٢٧٠°

٢) أوجد قيمة كلاً من:
(١) حا ٣٠° + حتا ٦٠° + طا ٤٥°

لو صعبت الحل لو خيت السيل
علاقة رأيت قدها

٢) $\text{ط}\ 0^\circ + \text{حا}\ 180^\circ + \text{حتا}\ 90 + \text{حا}\ 30^\circ$

٣) $\text{حتا}\ 0^\circ + \text{حتا}\ 90^\circ + \text{ط}\ 180^\circ + \text{حتا}\ 360^\circ$

٤) $\text{ط}^2\ 60^\circ - \text{قا}^2\ 60^\circ + \text{حا}\ 90^\circ$

٥) $2\text{حا}\ 30^\circ \text{حتا}\ 60^\circ + \sqrt{2}\ \text{حا}\ 45^\circ \text{حا}\ 90^\circ$

٦) $\text{حتا}\ 90^\circ\ \text{قتا}\ 30^\circ + \text{قا}^2\ 45^\circ \text{حا}\ 30^\circ - \text{حتا}\ 270^\circ \text{حا}\ 180^\circ$

٧) $4\text{حا}\ 30^\circ\ \text{حا}\ 90^\circ - \text{حتا}\ 0^\circ\ \text{قا}\ 60^\circ + 5\text{ط}\ 45^\circ + 10\ \text{حتا}^2\ 45\ \text{حا}\ 270^\circ - \text{ط}\ 30^\circ \text{حا}\ 180^\circ$

٣) أثبت صحة كلا من المتطابقات الآتية:

١) $2\text{حا}\ 45^\circ \text{حتا}\ 45^\circ \text{ط}\ 45^\circ = 1$

٢) $\text{قا}\ 30^\circ \text{ط}\ 60^\circ + \text{قتا}^2\ 60^\circ - \text{ط}^2\ 45^\circ = \frac{7}{3}$

٣) $\text{حا}(60^\circ - 30^\circ) - \text{حتا}\ 60^\circ + \text{حتا}^2\ 45^\circ = \frac{1}{2}$

٤) $\text{حتا}^2\ 30^\circ \text{طتا}^2\ 60^\circ \text{ط}\ 45^\circ = \frac{1}{4}$

٥) $2\text{حتا}^2 \frac{\pi}{3} + 3\text{حا}^2 \frac{\pi}{4} + 4\text{ط}^2 \frac{\pi}{3} - 4\ \text{حا}\ \frac{\pi}{2} = 10$

٦) $\text{حا}\ 60^\circ = 2\ \text{حا}\ 30^\circ \text{حتا}\ 30^\circ$

٤) أوجد قيمة س إذا كان :

١) $\text{س حا}^2 \frac{\pi}{4} \text{حتا}\ \pi = \text{ط}^2 \frac{\pi}{3}\ \text{حا}\ \frac{3\pi}{2}$

٢) $\text{س حا}\ \frac{\pi}{4} \text{حتا}\ \frac{\pi}{4} \text{ط}\ \frac{\pi}{3} = \text{ط}^2 \frac{\pi}{4} - \text{حا}\ \frac{3\pi}{2}$

٥) أوجد قيمة س إذا كان س $\in [0 ، \frac{\pi}{2}]$:

١) $\text{حا س} = \text{حا}\ 30^\circ \text{حتا}\ 60^\circ + \text{حتا}\ 30^\circ \text{حا}\ 60^\circ$

٢) $3\text{ط}^2\ \text{س} = 4\text{حا}^2 \frac{\pi}{6} + 8\text{حتا}^2 \frac{\pi}{3}$

٣) $\text{حتا س} = \frac{\text{حا}\ 60^\circ}{\text{حا}\ 90^\circ} - \frac{\text{حا}\ 0^\circ}{\text{حا}\ 45^\circ}$

علاقة رأت قدها
لو صوت الحزن لو خيت السيل