



## الدوال المثلثية الأساسية ومقلوباتها

### الدوال المثلثية الأساسية ومقلوباتها:



$$\begin{aligned} \text{قتا } \theta &= \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} \\ \text{قا } \theta &= \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} \\ \text{طتا } \theta &= \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{في الشكل العقاب:} \\ \Delta B \text{ قائم الزاوية في } B \text{ فيكون:} \\ \text{ـ حا } \theta &= \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \\ \text{ـ حتا } \theta &= \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \\ \text{ـ طا } \theta &= \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \end{aligned}$$

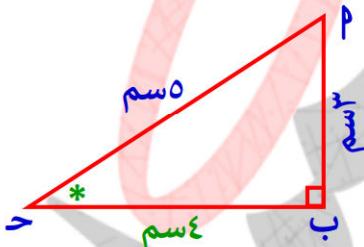
### سميات الدوال المثلثية:

- ـ قتا: تعني قاطع تمام الزاوية
- ـ قا: تعني قاطع الزاوية
- ـ طتا: تعني ظل تمام الزاوية

- ـ حا: تعني جيب الزاوية
- ـ حتا: تعني جيب تمام الزاوية
- ـ طا: تعني ظل الزاوية

**مثال 1**  $\Delta B$  مثلث قائم الزاوية في  $B$  فيه  $AB = 5$  سم،  $BC = 3$  سم،  $AC = 4$  سم أوجد الدوال الأساسية ومقلوباتها للزاوية  $\theta$

### $\theta$



أولاً: نحسب طول ضلع القائمة  $B$  من نظرية فيثاغورث

$$B = \sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \text{ سم}$$

$$\begin{aligned} \text{ـ قتا } \theta &= \frac{5}{3} \\ \text{ـ قا } \theta &= \frac{5}{4} \\ \text{ـ طتا } \theta &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ـ حا } \theta &= \frac{3}{5} \\ \text{ـ حتا } \theta &= \frac{4}{5} \\ \text{ـ طا } \theta &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

### ملاحظات هامة:

\* أي دالة مثلثية  $\times$  مقلوبها = 1

$$\begin{aligned} \text{ـ حا } \theta \times \text{قتا } \theta &= 1 \\ \text{ـ حتا } \theta \times \text{قا } \theta &= 1 \\ \text{ـ طا } \theta \times \text{طتا } \theta &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{ـ طا } \theta = \frac{\text{حا } \theta}{\text{حتا } \theta} \quad \text{ـ الطا من غير تبدأ البسط من غير تـ طتا } \theta = \frac{\text{حتا } \theta}{\text{حا } \theta}$$







**مثال ٢** إذا كان الضلع النهائي للزاوية  $\theta$  المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة  $B\left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$  أوجد الدوال المثلثية الأساسية للزاوية  $\theta$  ومقلوباتها

**خلي بالك**

عند حساب طا $\theta$   
نختصر الـ(٥) اللي  
في المقامين مع بعض

الله

$$\begin{array}{ll} \text{قتا } \theta = \frac{5}{3} & \text{ومقلوبها} \\ \text{قا } \theta = \frac{5}{4} & \text{ومقلوبها} \\ \text{طتا } \theta = \frac{4}{3} & \text{ومقلوبها} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{حا } \theta = \text{ص} = \frac{3}{5} \\ \text{حتا } \theta = \text{س} = \frac{4}{5} \\ \text{طا } \theta = \text{ص} = \frac{3}{4} \end{array}$$

**مثال ٣** إذا كان الضلع النهائي للزاوية  $\theta$  المرسومة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة  $B\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$  حيث  $\text{ص} > 0$ . أوجد  $\text{حا } \theta$  ،  $\text{جتا } \theta$  ،  $\text{طا } \theta$  ،  $\text{قتا } \theta$  ،  $\text{طتا } \theta$

الله

من دائرة الوحدة:  $\text{ص} = \pm \sqrt{1 - \text{س}^2}$  ولكن  $\text{ص} > 0$ . يعني موجبة

فتصبح  $(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$

$$\therefore \text{ص} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$$\begin{array}{ll} \text{قتا } \theta = \frac{13}{12} & \text{ومقلوبها} \\ \text{قا } \theta = \frac{13}{5} & \text{ومقلوبها} \\ \text{طتا } \theta = \frac{5}{12} & \text{ومقلوبها} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{حا } \theta = \text{ص} = \frac{12}{13} \\ \text{حتا } \theta = \text{س} = \frac{5}{13} \\ \text{طا } \theta = \text{ص} = \frac{12}{5} \end{array}$$

**مثال ٤** أثبتت أن النقطة  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  تقع على دائرة الوحدة وإذا من الضلع النهائي لزاوية موجهة قياسها  $\theta$  بالنقطة  $B$  فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية.

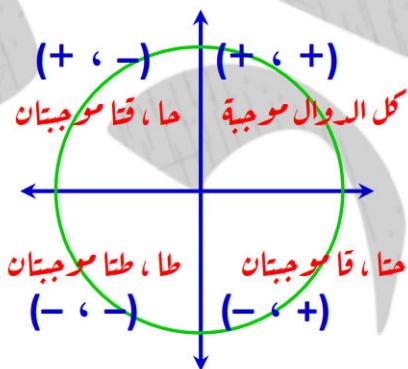
الله

$$\begin{aligned} \text{نحسب: } \text{س}^2 + \text{ص}^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \\ \therefore \text{نقطة } B &\text{ تقع على دائرة الوحدة} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \text{طا } \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{حتا } \theta = \frac{1}{2} \\ \text{قتا } \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} & \text{قا } \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

إشارة الدوال المثلثية في الأرباع المختلفة:

الربع	$\exists \theta$	حا، قتا	حتا، قتا	طا، قتا	خلي بالك
الأول	$[0^\circ, 90^\circ]$	موجب	موجب	موجب	عند حساب طا $\theta$ نختصر الـ(٥) اللي في المقامين مع بعض
الثاني	$[90^\circ, 180^\circ]$	موجب	سالب	سالب	نحو سالب طا $\theta$
الثالث	$[180^\circ, 270^\circ]$	سالب	سالب	سالب	نحو سالب قتا $\theta$
الرابع	$[270^\circ, 360^\circ]$	سالب	موجب	موجب	نحو موجب قتا $\theta$





**مُثُلٌ ٥** حدد إشارة كل من الدوال المثلثية الآتية:

- (٢)  $\sin 225^\circ$   
 (٤)  $\cos (-300^\circ)$   
 (٦)  $\tan (660^\circ)$

- (١) طا  $150^\circ$   
 (٣) قتا  $300^\circ$   
 (٥) حا  $-100^\circ$

### الإجابة

(١) طا  $150^\circ$  إشارتها سالبة لأن  $150^\circ$  في الربع الثاني الذي فيه طا سالبة  
 (٢) حا  $225^\circ$  إشارتها سالبة لأن  $225^\circ$  في الربع الثالث الذي فيه حا سالبة  
 (٣) قتا  $300^\circ$  إشارتها سالبة لأن  $300^\circ$  في الربع الرابع الذي فيه قتا (حا) سالبة  
 (٤) طا  $-300^\circ$  هنا مينفعش تتعامل مع  $-300^\circ$   
 نحسب أصغر قياس موجب  $= -300 + 360 = 60^\circ$  في الربع الأول الذي فيه طا موجبة

(٥) حا  $-100^\circ$  هنا مينفعش تتعامل مع  $-100^\circ$   
 نحسب أصغر قياس موجب  $= -100 + 360 = 260^\circ$  في الربع الثالث الذي فيه حا سالبة

(٦) طا  $660^\circ$  هنا مينفعش تتعامل مع  $660^\circ$

نحسب أصغر قياس موجب  $= 660 - 360 = 300^\circ$  في الربع الرابع الذي فيه حا سالبة

**مُثُلٌ ٦** حدد الربع في كل من الحالات التالية:

- (١) إذا كان: حاس < ٠ ، حتا س > ٠.  
 (٢) إذا كانت: حاس < ٠ ، حتا س > ٠.

### الإجابة

(١) إذا كان: حاس < ٠ ، حتا س > ٠  
 فيكون حا موجبة ، حتا موجبة  
 ∴ س في الربع الأول  
 (٢) إذا كانت: حاس < ٠ ، حتا س > ٠  
 فيكون حا موجبة ، حتا سالبة  
 ∴ س في الربع الثاني

**مُثُلٌ ٧** إذا كانت  $\theta$  قياس زاوية في وضعها القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة

$(س، س)$  حيث  $\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$  أوجد قيمة  $1 - \operatorname{قا}^2 \theta$

### الإجابة

من دائرة الوحدة:  $س^2 + ص^2 = 1$   
 $س^2 = 1$

$$س^2 = \frac{1}{2}$$

بالجذر التربيعي

$$س = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ولكن  $\theta \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$  الربع الثالث

$\therefore س = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  وتكون النقطة  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

المطلوب:  $1 - \operatorname{قا}^2 \theta = 1 - (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2$   
 $1 - \operatorname{قا}^2 \theta = 2 - 1 = 1$





الله  
بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

إذا كانت نقطة التقاطع مع دائرة الوحدة هي: ب( $\frac{5}{13}$ ,  $\frac{12}{13}$ )

$$\therefore \text{حata} - \theta = \frac{12}{13} - \frac{5}{13} = \frac{7}{13}$$

#### **مُثْلِح١٢) أخْتُرِ الإِجَابَةِ الْصَّدِيقَةِ مِنْ بَيْنِ الإِجَابَاتِ الْمُعْطَاهُ:**

إذا كان طا  $\theta = \frac{3}{4}$  حيث  $\theta$  زاوية حادة في وضعها القياسي فإن: ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة.....

$$\left(\frac{r}{0}, \frac{\xi}{0}\right) \textcircled{5}$$

$$\left(\frac{\xi}{0}, \frac{\mathfrak{r}}{0}\right) \text{ (7)}$$

(٣، ٤) ب

(۲، ۳) پ

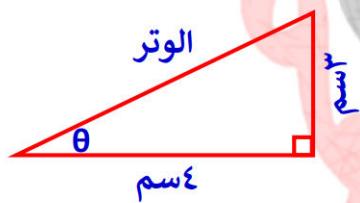
نرسم المثلث القائم ونحسب منه حتا<sub>0</sub> ، حا<sub>0</sub>

$$\frac{\pi}{4} = \theta b$$

$$\text{الوتر} = \sqrt{24 + 23} = 5$$

$$\frac{3}{5} = \theta \text{ حا} \quad , \quad \frac{4}{5} = \theta \text{ حتا}$$

٥) الإختيار .. نقطة التقاطع مع دائرة الوحدة هي  $(\text{حتا}\theta, \text{حا}\theta) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$





## ٤ تمارين الدوال المثلثية

أولاً: أختير الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعلقة:

(١) أي من الزوايا الآتية يكون الجيب وجيب التمام لها سالبين معاً؟

٣١٠ (٥)

١٢٠ (٧)

٢٣٠ (٦)

٧٠ (٩)

(٢) إذا كان  $(س، ص)$  نقطة تقاطع الصلع النهائي لزاوية قياسها  $\theta$  في وضعها القياسي مع دائرة الوحدة

حيث  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  فإن:  $\sin \theta = \dots\dots\dots\dots\dots$

٣- (٥)

١/٣ (٧)

-١/٢ (٦)

١/٢ (٩)

(٣) إذا كان  $\theta$  زاوية في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة  $(س، ص)$  حيث  $س < 0$  فإن:  $\theta = \dots\dots\dots\dots\dots$

٣١٥ (٥)

٢٢٥ (٧)

١٣٥ (٦)

٤٥ (٩)

(٤) إذا كان  $\theta < 0$  فإن:  $\theta$  تقع في الربع .....

٥ الرابع

٦ الثالث

٧ الثاني

٨ الأول

٥ الرابع

٦ الثالث

٧ الثاني

٨ الأول

(٦) زاوية موجهة في وضعها القياسي يمر ضلعها النهائي بالنقطة  $(٣، ٤)$  فإن ضلعها الابتدائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة .....

٦ (٠، ٨، ٠، ٦)

٧ (٤، ٠)

٨ (٠، ١)

٩ (٠، ٣)

(٧) إذا كان الصلع النهائي لزاوية قياسها  $\theta$  في وضعها القياسي يقطع دائرة الوحدة في  $(-\frac{3}{2}, ص)$  حيث  $ص > 0$  فإن:  $\theta = \dots\dots\dots\dots\dots$

٣٣٠ (٥)

٢١٠ (٧)

١٥٠ (٦)

٣٠ (٩)

(٨) إذا كان  $\theta = -\frac{1}{2}$  ،  $\sin \theta = -\frac{3}{2}$  فإن الزاوية التي قياسها  $\theta$  تقع في الربع .....

٥ الرابع

٦ الثالث

٧ الثاني

٨ الأول

(٩) إذا كان  $\sin^2 \theta = \frac{9}{25}$  ،  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  فإن:  $\cos \theta = \dots\dots\dots\dots\dots$

٢٤ (٥)

٢٣ (٧)

٢٢ (٦)

٢٠ (٩)

(١٠) في الشكل المقابل:

دائرة الوحدة ،  $س(٥ و ٦) = 20^\circ$

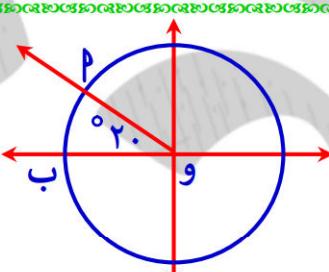
فإن: إحداثيات النقطة  $٦$  هي = .....

(٦، ٢٠) ،  $\sin 20^\circ$

(٦، ١٦) ،  $\sin 16^\circ$

(٢٠، ٦) ،  $\sin 16^\circ$

(٢٠، ٢٠) ،  $\sin 20^\circ$





(١١) إذا كان طا  $\theta = \frac{5}{12}$  ، حتا  $\theta < 0$  . فإن: قتا  $\theta = \dots\dots\dots\dots\dots$

$$\frac{13}{5} \quad (5)$$

$$\frac{13}{5} \quad (7)$$

$$\frac{5}{13} \quad (ب)$$

$$\frac{5}{13} \quad (١)$$

(١٢) إذا كان:  $قا \theta = 4$  قتا  $\theta = \dots\dots\dots\dots\dots$  فإن: طا  $\theta +$  طتا  $\theta = \dots\dots\dots\dots\dots$

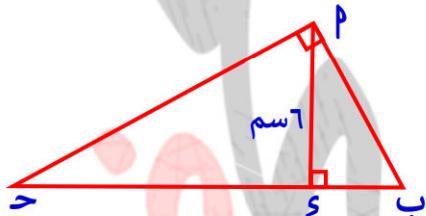
$$\frac{7}{12} \quad (5)$$

$$\frac{7}{25} \quad (7)$$

$$\frac{12}{25} \quad (ب)$$

$$\frac{25}{12} \quad (١)$$

(١٣) في الشكل المقابل:



إذا كان طا  $B +$  طا  $A = \frac{5}{3}$   
فإن:  $B - A = \dots\dots\dots\dots\dots$

$$\frac{8}{12} \quad (ب)$$

$$\frac{6}{10} \quad (٤)$$

ثانياً: الأسئلة المقالية:

(١) حدد الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التالية وابحث اشارتها:

$$\begin{array}{l} (4) \quad {}^{\circ}31 - {}^{\circ}45 \\ (8) \quad {}^{\circ}37 - {}^{\circ}45 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2) \quad {}^{\circ}320 \\ (7) \quad {}^{\circ}330 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (2) \quad {}^{\circ}140 \\ (6) \quad {}^{\circ}250 \\ (5) \quad {}^{\circ}250 - {}^{\circ}460 \end{array}$$

(٢) إذا كان الضلع النهائي لزاوية موجهة  $\theta$  في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقطة  $M\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right)$

(٢) أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية  $\theta$       (١)

(٣) أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها  $\theta$  المرسومة في الوضع القياسي وضلعها يقطع دائرة الوحدة في النقطة.

$$(1) \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad (2) \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \quad (3) \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

(٤) إذا كان  $\theta$  هو قياس زاوية موجهة في وضعها القياسي ، ب  $\left(\frac{2}{3}, \text{ص}\right)$  نقطة تقاطع ضلعها النهائي

مع دائرة الوحدة فأوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية إذا كانت  ${}^{\circ}360 > \theta > {}^{\circ}270$

(٥) إذا كان  $\theta$  هو قياس زاوية موجهة في وضعها القياسي ، ب  $\left(\text{س} , -\frac{1}{2}\right)$  نقطة تقاطع ضلعها النهائي

مع دائرة الوحدة فأوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية إذا كانت  ${}^{\circ}180 > \theta > {}^{\circ}90$

(٦) إذا كان  $\theta$  هو قياس زاوية موجهة في وضعها القياسي ، ب  $\left(\frac{1}{3}, \text{ص}\right)$  نقطة تقاطع ضلعها النهائي

مع دائرة الوحدة فأوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية إذا كانت: ص > .

(٧) إذا كان  $\theta$  هو قياس زاوية موجهة في وضعها القياسي ، ب  $\left(\text{س} , \text{س}\right)$  نقطة تقاطع ضلعها النهائي

مع دائرة الوحدة فأوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية إذا كانت:  $\pi > \theta > \frac{\pi}{2}$

(٨) إذا كان  $\theta$  هو قياس زاوية موجهة في وضعها القياسي ، ب  $\left(\text{س} , \text{س}\right)$  نقطة تقاطع ضلعها النهائي

مع دائرة الوحدة فأوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية إذا كانت:  $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$





(٩) إذا كان  $\theta$  هو قياس زاوية موجهة في وضعها القياسي ، ب (٢٥ ، ٢١٢) نقطة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية إذا كانت:  $\theta$  في الربع الأول.

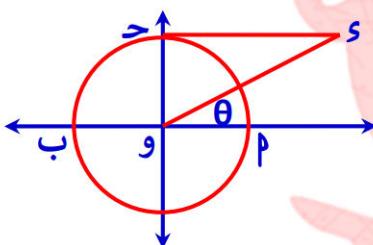
(١٠) إذا كان  $\theta$  هو قياس زاوية موجهة في وضعها القياسي ، ب (-١ ، ص) نقطة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية

(١١) إذا كان  $\theta$  هو قياس زاوية موجهة في وضعها القياسي ، ب (س ،  $\frac{1}{3}$ ) نقطة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة إذا كانت:  $\frac{\pi}{4} > \theta > \frac{\pi}{2}$  فأوجد:  $\cot \theta - \tan \theta$

مهام ركن الدحيحه:

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المطوبة:

(١) في الشكل المقابل:



دائرة الوحدة ،  $P$  مماس للدائرة عند  $P$

فإن إحداثي النقطة  $P$  بدلالة الدوال المثلثية للزاوية  $\theta$

(١)  $\tan(\theta, 1)$  (٢)  $(\tan, \theta)$

(٣)  $(1, \tan \theta)$  (٤)  $(\tan, 1)$

(٢) في الشكل المقابل:

$P$  ب  $P$  مربع ،  $P = 2$  سم ،  $B = H = 8$  سم

فإن:  $\tan \theta = ?$

- |                   |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| (١) $\frac{4}{5}$ | (٢) $\frac{3}{5}$ | (٣) $\frac{2}{5}$ | (٤) $\frac{3}{4}$ |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|

(٣) في الشكل المقابل:

$P(2, 1) = \theta$  ،  $\tan \theta = ?$

فإن:  $\sin \theta = ?$

- |                   |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| (١) $\frac{1}{2}$ | (٢) $\frac{3}{4}$ | (٣) $\frac{4}{3}$ | (٤) $\frac{3}{2}$ |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|

(٤) في الشكل المقابل:

دائرة الوحدة

فإن: مساحة  $\Delta PAB = ?$

(١)  $\frac{1}{2} \tan \theta$

(٢)  $\frac{1}{2} (\tan \theta + \cot \theta)$

(٣)  $\cot \theta \tan \theta$

(٤)  $\frac{1}{2} \sin \theta$

