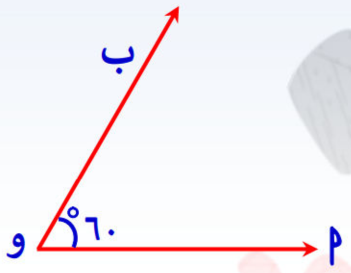
الزاوية الموجهة

الزاوية في الهندسة:

* الزاوية هندسياً : هي اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية.

☑ في الشكل المقابل:

- $\overrightarrow{\text{و أ}} \cup \overrightarrow{\text{و ب}}$ = ∠ أ و ب
- (∠ أ و ب) هي (∠ ب و أ) هي (∠ و)
- ق(∠ أ و ب) = ق (∠ ب و أ) = ق (∠ و) = ٦٠°



الزاوية الموجهة:

* هي زوج مرتب من شعاعين لهما نفس نقطة البداية

☑ في الشكل المقابل:

- الزوج المرتب ($\overrightarrow{\text{و أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ب}}$) يعبر عن الزاوية الموجهة ∠ أ و ب
- ق(∠ أ و ب) الموجب = ٦٠°
- ق(∠ أ و ب) السالب = −٣٠٠°

☑ في الشكل المقابل:

- الزوج المرتب ($\overrightarrow{\text{و ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{و أ}}$) يعبر عن الزاوية الموجهة ∠ ب و أ
- ق(∠ ب و أ) الموجب = ٣٠٠°
- ق(∠ ب و أ) السالب = −٦٠°

* (∠ أ و ب الموجهة) ≠ (∠ب و أ الموجهة) وذلك لأن: ($\overrightarrow{\text{و أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ب}}$) ≠ ($\overrightarrow{\text{و ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{و أ}}$)

القياس الموجب والسالب لزاوية الموجهة:

☜ في حل المسائل يتم التعامل مع القياس الموجب

* لكل زاوية موجهة غير صفرية قياسان أحدهما موجب (θ) والآخر سالب ($-\beta$)

- القياس الموجب − القياس السالب = ٣٦٠° ⟸ $\theta - (-\beta) = ٣٦٠°$
- مجموع القيمتين المطلقتين لهما = ٣٦٠° ⟸ $|\theta| + |\beta| = ٣٦٠°$
- يكون القياس الموجب إذا كان اتجاه السهم من الضلع الابتدائى للضلع النهائى عكس اتجاه حركة عقارب الساعة
- يكون القياس السالب إذا كان اتجاه السهم من الضلع الابتدائى للضلع النهائى مع اتجاه حركة عقارب الساعة

* إذا كان القياس الموجب لزاوية هو θ فإن:

- القياس السالب = θ − ٣٦٠° ☜ نحسب القياس السالب تبقى ٣٦٠ بالسالب

* إذا كان القياس السالب لزاوية هو $-\beta$ فإن:

- القياس الموجب = $-\beta$ + ٣٦٠° ☜ نحسب القياس الموجب تبقى ٣٦٠ بالموجب

ملاحظـــات:

☜ في المسائل وحلنا بعد كدا بنستخدم القياس الموجب فقط للزاوية الموجهة

يعني كدا

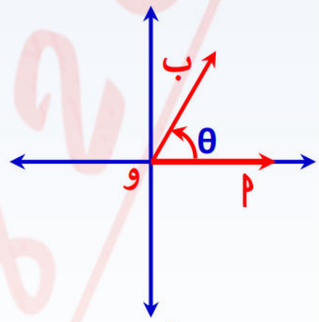
* الزاوية التي قياسها ٨٥° ⟸ يكون القياس السالب لها = ٨٥° − ٣٦٠° = −٢٧٥°
* للزاوية التي قياسها −١٠٠° ⟸ يكون القياس الموجب لها = −١٠٠° + ٣٦٠° = ٢٦٠°

الزاوية الموجهة في الوضع القياسي:

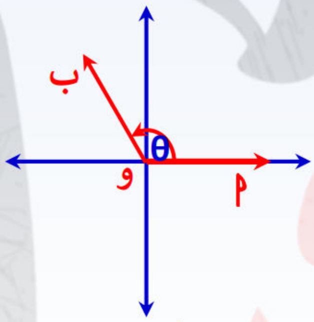
* تكون الزاوية الموجهة في وضعها القياسي إذا تحقق الشرطان الآتيان

١) ضلعها الابتدائى يقع على الجزء الموجب لمحور السينات

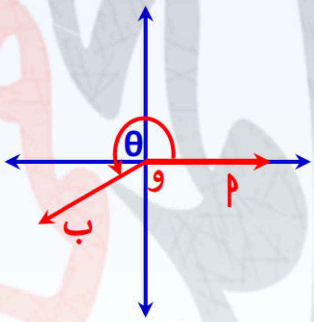
٢) رأسها هو نقطة الأصل لنظام إحداثي متعامد



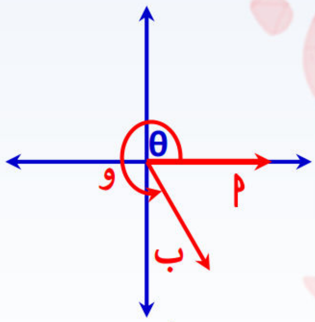
∠أ و ب
تقع في الربع الأول
٠° < θ < ٩٠°



∠أ و ب
تقع في الربع الثاني
٩٠° < θ < ١٨٠°



∠أ و ب
تقع في الربع الثالث
١٨٠° < θ < ٢٧٠°



∠أ و ب
تقع في الربع الرابع
٢٧٠° < θ < ٣٦٠°

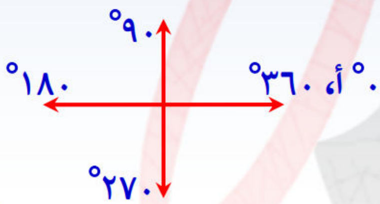
☜ ممكن نستخدم القياس الموجب أو السالب للزاوية الموجهة في الوضع القياسي

الزوايا الربعيـــــة:

☜ سميت بالربعية لأنها بداية ونهاية الارباع على الشبكة التربيعية

* إذا وقع الضلع النهائى للزاوية الموجهة في الوضع القياسي على أحد المحاور كانت زاوية ربعية

☜ تسمى الزوايا : ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° بالزوايا الربعية



مثال ١ عين الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا الموجهة التي قياسها كالآتي:

١) ٢١٠° ٢) ١١٥° ٣) ٢٧° ٤) −١٢٠°

الحل

١) ٢١٠° ∵ ١٨٠° < ٢١٠° < ٢٧٠°
∴ تقع في الربع الثالث

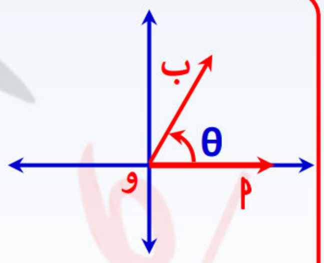
٢) ١١٥° ∵ ٩٠° < ١١٥° < ١٨٠°
∴ تقع في الربع الثاني

٣) ٢٧° ∵ ٠° < ٢٧° < ٩٠°
∴ تقع في الربع الاول

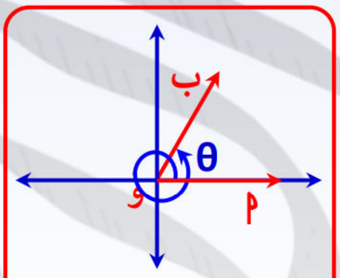
٤) −١٢٠° ☜ لازم حساب القياس الموجب لمعرفة الربع
∵ القياس الموجب = −١٢٠° + ٣٦٠° = ٢٤٠°
∵ ١٨٠° < ٢٤٠° < ٢٧٠°
∴ تقع في الربع الثالث

الزاويا المتكافئة:

* يقال لعدة زوايا موجهة في الوضع القياسي أنها متكافئة إذا كان لها نفس الضلع النهائي
* الزوايا التالية هي زوايا متكافئة:

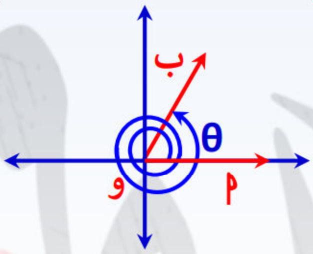


ق(∠ أ و ب) =
θ



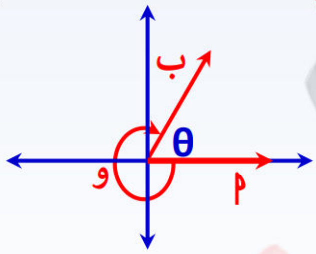
ق(∠ أ و ب) =
θ + ١ × ٣٦٠°

علشان دورة واحدة
عكس عقارب الساعة



ق(∠ أ و ب) =
θ + ٢ × ٣٦٠°

علشان دورتين
عكس عقارب الساعة



ق(∠ أ و ب)
= θ − ٣٦٠°

علشان دورة واحدة
مع عقارب الساعة

ملاحظـــــات:

* الزوايا الموجهة التى في الوضع القياسي والتي قياسها:
* θ أ، (θ ± ٣٦٠°) أ، (θ ± ٢×٣٦٠°) أ، (θ ± ٣×٣٦٠°) أ، ......أ، (θ ± ن × ٣٦٠°)

تكون زوايا متكافئة حيث ن عدد صحيح موجب.

* ٣٦٠° مضاعفاتها هي ٧٢٠°، ١٠٨٠°، ١٤٤٠°، ....، ن× ٣٦٠° فيكون:
* θ تكافئ θ ± ٣٦٠°
* θ تكافئ θ ± ٧٢٠°
* θ تكافئ θ ± ١٠٨٠°
* θ تكافئ θ ± ١٤٤٠

* إذا كانت θ ، β متكافئتين فإن:
* θ − β = ± ٣٦٠° × ن
* الفرق بين الزاويتين المتكافئتين = ٣٦٠° أو مضاعفاتها
* الزاويتين: − θ ، − β متكافئتين

اصغر قياس موجب و أكبر قياس سالب للزاوية الموجهة:

* هو أصغر قياس موجب للزاوية الموجهة بحيث يكون أكبر من الصفر° وأقل من ٣٦٠°
* أي أن: إذا كانت: ٠° < θ < ٣٦٠° فإن تسمى θ أصغر قياس موجب لزاوية

* هو أكبر قياس سالب للزاوية الموجهة بحيث يكون أقل من الصفر° وأكبر من −٣٦٠°
* أي أن: إذا كانت: −٣٦٠° < θ < ٠° فإن تسمى θ أكبر قياس سالب لزاوية

* الفرق بين أصغر قياس موجب وأكبر قياس سالب = ٣٦٠°

مثال ٢ أوجد أصغر قياس موجب و عين الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياسها كالآتي:

١) −٧٠° ٢) ٨٤٠° ٣) −٧٨٠° ٤) ٤٣٢°

الحل

١) −٧٠° = −٧٠° + ٣٦٠° = ٢٩٠° بأضافة ٣٦٠° لقياس الزاوية

∵ ٢٧٠° < ٢٩٠° < ٣٦٠° ∴ تقع في الربع الرابع

٢) ٨٤٠° = ٨٤٠° − ٧٢٠° = ١٢٠° بطرح ٧٢٠° من قياس الزاوية

∵ ٩٠° < ١٢٠° < ١٨٠° ∴ تقع في الربع الثاني

٣) −٧٨٠° = −٧٨٠° + ١٠٨٠° = ٣٠٠° بأضافة ١٠٨٠° لقياس الزاوية

∵ ٢٧٠° < ٣٠٠° < ٣٦٠° ∴ تقع في الربع الرابع

٤) ٤٣٢° = ٤٣٢° − ٣٦٠° = ٧٢° بطرح ٣٦٠° من قياس الزاوية

∵ ٠° < ٧٢° < ٩٠° ∴ تقع في الربع الأول

مثال ٣ أوجد أحدى القياسات السالبة لكل من الزوايا التى قياسها كالآتي:

١) ٦٤° ٢) ٧٥٢°

الحل

١) ٦٤° = ٦٤° − ٣٦٠° = −٢٩٦° بطرح ٣٦٠° من قياس الزاوية

٢) ٧٥٢° = ٧٥٢° − ١٠٨٠° = −٣٢٨° بطرح ١٠٨٠° من قياس الزاوية

مثال ٤ إذا كان (٤θ + ٩٠)° ، (٥٠ − ٦θ)° هما القياسين الموجب والسالب لزاوية موجهة على الترتيب أوجـد أقل قيمة موجبة للمجهول θ

الحل

القياس الموجب − القياس السالب = ٣٦٠°

(٤θ + ٩٠)° − (٥٠ − ٦θ)° = ٣٦٠°

١٠θ + ٤٠° = ٣٦٠°

١٠θ = ٣٦٠° − ٤٠°

١٠θ = ٣٢٠°

∴ θ = ٣٢°

مثال ٥ إذا كان (٤س + ٥)° أصغر قياس موجب ، (٤ص + ٥)° أكبر قياس سالب لزاويتين متكافئتين أوجـد قيمة س − ص

الحل

الفرق بين الزاويتن المتكافئتين = ٣٦٠°

(٤س + ٥)° − (٤ص + ٥)° = ٣٦٠°

٤س − ٤ص = ٣٦٠°

٤(س − ص) = ٣٦٠°

س − ص = ٩٠°

خلي بالك
❀ أصغر قياس موجب وأكبر قياس سالب يمثلان زاوتين متكافئتين

مثال ٦ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

الزاوية التي قياسها ١٧٢٠° تقع في الربع..............................

(أ) الأول (ب) الثاني (حـ) الثالث (ء) الرابع

الحـــل

∵ الزاوية ١٧٢٠° أكبر من ٣٦٠°

أصغر قياس موجب = ١٧٢٠° − ١٤٤٠° = ٢٨٠° محصورة بين ٢٧٠°، ٣٦٠°

∴ تقع الزاوية الربع الرابع الإختيار (ء)

مثال ٧ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

الزاوية التي قياسها ٧٠° + (٢ن + ٣) × ١٨٠° تقع في الربع..............................

(أ) الأول (ب) الثاني (حـ) الثالث (ء) الرابع

الحـــل

∵ قياس الزاوية = ٧٠° + (٢ن + ٣) × ١٨٠° = ٧٠° ٣٦٠°ن + ٥٤٠° نضرب ١٨٠° في القوس

∴ قياس الزاوية = ٥٧٠° + ٣٦٠°ن ٣٦٠°ن ملهاش لازمة في تحديد الربع

∴ قياس الزاوية = ٥٧٠° − ٣٦٠° = ٢١٠° محصورة بين ١٨٠°، ٢٧٠°

∴ تقع الزاوية في الربع الثالث الإختيار (حـ)

مثال ٨ أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

إذا دار الضلع النهائي لزاوية قياسها ١٢٠° في الوضع القياسي دورتان وربع الدورة عكس إتجاه دوران عقارب الساعة فإن الضلع النهائي يكون في الربع ....

(أ) الأول (ب) الثاني (حـ) الثالث (ء) الرابع

الحـــل

∵ الضلع النهائي دار دورتان وربع الدورة

∴ θ = ١٢٠° + ٢ × ٣٦٠° + ٩٠° (٢ × ٣٦٠°) ملهاش لازمة في تحديد الربع

∴ θ = ١٢٠° + ٩٠° = ٢١٠° محصورة بين ١٨٠°، ٢٧٠°

∴ تقع الزاوية في الربع الثالث الإختيار (حـ)

تمارين الزاوية الموجهة

أولا: أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

١) الزوج المرتب ($\overrightarrow{وأ}$ ، $\overrightarrow{وهـ}$) يمثل زاوية ....الموجهة

أ) د و أ هـ ب) د أ و هـ ج) د هـ و أ هـ د) د هـ أ و

٢) جميع الزوايا الموجهة في الوضع القياسي لها نفس...........

أ) الضلع النهائي ب) القياس ج) الدوال المثلثية د) الضلع الأبتدائي

٣) الزاوية التي قياسها ٥٨٥° تكافئ في الوضع القياسي الزاوية التي قياسها...............

أ) ٤٥° ب) ١٣٥° ج) ٢٢٥° د) ٣١٥°

٤) جميع الزوايا التالية مكافئة للزاوية ٧٥° في الوضع القياسي ما عدا ....

أ) –٢٨٥° ب) –٦٤٥° ج) ٢٨٥° د) ٤٣٥°

٥) الزاوية التي قياسها (–١٣٥°) تقع في الربع ....

أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع

٦) جميع الزوايا التي قياستها كالأتي تقع في الربع الثاني ماعدا ....

أ) –٢٤٠° ب) ١٠٠° ج) –١٢٠° د) ٨٦٠°

٧) إذا كان θ ، – θ قياسى زاويتين متكافئتين فإن إحدى قيم θ هي ....

أ) ٩٠° ب) ١٨٠° ج) ١٥٠° د) ٢٧٠°

٨) إذا دار الضلع النهائي لزاوية قياسها ٣٠° في الوضع القياسي ثلاث دورات ونصف مع إتجاه دوران عقارب الساعة فإن الضلع النهائي يكون في الربع ....

أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع

٩) الزاوية التي قياسها –٢٤٠° تقع في الربع ....

أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع

١٠) الزاوية التي قياسها (–١٣٠٠°) تقع في الربع ....

أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع

١١) الزاوية التى قياسها ٦٠° في الوضع القياسي تكافئ الزاوية التي قياسها =...............

أ) ١٢٠° ب) ٢٤٠° ج) ٣٠٠° د) ٤٢٠°

١٢) الزاوية التى قياسها ٥٨٥° تكافئ في الوضع القياسي الزاوية التي قياسها =...............

أ) ٤٥° ب) ١٣٥° ج) ٢٢٥° د) ٣١٥°

١٣) جميع الزوايا التي قياسها كالآتي تقع في الربع الثاني ماعدا..............

أ) –٢١٠° ب) ١٢٠° ج) ٨٦٠° د) –٤٦٠°

١٤) الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها 1670° هو..............................

Ⓜ الأول Ⓑ الثاني Ⓒ الثالث Ⓓ الرابع

١٥) إذا دار الضلع النهائي لزاوية قياسها 60° في الوضع القياسي دورتان ونصف مع إتجاه دوران عقارب الساعة فإن الضلع النهائى يمثل الزاوية.....................

Ⓜ 60° Ⓑ 120° Ⓒ 150° Ⓓ 240°

١٦) الزاوية التى قياسها $45^\circ + (4\text{ن} + 1) 90^\circ$ تقع في الربع ....حيث ن عدد صحيح

Ⓜ الأول Ⓑ الثاني Ⓒ الثالث Ⓓ الرابع

١٧) إذا كان ﻡ ، ب قياسا زاويتين متكافئتين فإن: -ﻡ ، - ب يكونان ....

Ⓜ متكاملتين Ⓑ متكافئتين Ⓒ متتامتين Ⓓ مجموعهما -360°

١٨) إذا دار الضلع النهائي لزاوية قياسها 30° في الوضع القياسي دورتان وربع عكس إتجاه دوران عقارب الساعة فإن الضلع النهائى يكون في الربع.....................

Ⓜ الأول Ⓑ الثاني Ⓒ الثالث Ⓓ الرابع

ثانياً: الأسئلة المقالية:

١) أوجد أصغر قياس موجب ثم عين الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالآتي:

١) -150°	٢) 555°	٣) -650°	٤) 940°
٥) 964°	٦) -1070°	٧) 875°	٨) -2020°

٢) حدد الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا الموجهة التى قياساتها كالآتي:

١) -12°	٢) 530°	٣) 650°	٤) -790°
٥) 645°	٦) -645°	٧) -315°	٨) -850°

٣) عين أحد القياسات السالبةلكل زاوية من الزوايا الموجهة التى قياساتها كالآتي:

١) 45°	٢) 215°	٣) 241°	٤) 90°
٥) 452°	٦) 144°	٧) 225°	٨) 850°

٤) أوجد زاويتين أحدهما بالقياس الموجب والأخرى بالقياس السالب مشتركين في الضلع النهائي لكل زاوية من الزوايا التى قياساتها كالآتي:

١) 55°	٢) 210°	٣) -135°	٤) -90°

ركن الدحيحة:

أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

١) إذا كان 2θ ، $-\theta$ زاويتين متكافئتين فإن إحدى قيم θ هي.....................

Ⓜ 150° Ⓑ -240° Ⓒ -180° Ⓓ 270°